

# Twierdzenie Atiyah–Botta o periodyczności

Mateusz Kujawski

Luty 2025

## Przypomnienie: topologiczna K-teoria

- ▶  $X$  – przestrzeń zwarta.  $\text{Vect}(X)$  – zbiór klas izomorfizmu zespolonych sk.-wymiarowych wiązek wektorowych nad  $X$ .
- ▶  $\text{Vect}(X)$  jest półpierścieniem ze względu na  $\oplus$  i  $\otimes$ . Będziemy pisać  $\gamma^n$  na  $\underbrace{\gamma \otimes \cdots \otimes \gamma}_n$
- ▶ Przez  $K(X)$  oznaczamy  $K$ -teorię  $\text{Vect}(X)$ .
- ▶  $K$  działa też na morfizmach przez przeciągnięcia.

Skonstruowaliśmy kontrawariantny funktor  $\mathbf{hTop} \rightarrow \mathbf{Ring}$ .

## Definicja

$$\pi_X: X \times Y \rightarrow X \quad \pi_Y: X \times Y \rightarrow Y.$$

Homomorfizm pierścieni zadany na tensorach prostych

$$\begin{aligned} \mu: K(X) \otimes K(Y) &\rightarrow K(X \times Y) \\ \zeta \otimes \gamma &\mapsto \pi_X^*(\zeta) \otimes \pi_Y^*(\gamma) \end{aligned}$$

nazywamy *cross-produktem*.

Zamiast  $\mu(\zeta \otimes \gamma)$  będziemy pisać  $\zeta \hat{\otimes} \gamma$

## Twierdzenie (Atiyah-Bott)

Homomorfizm

$$\begin{aligned}\mu: K(X) \otimes K(S^2) &\rightarrow K(X \times S^2) \\ \xi \otimes \gamma &\mapsto \pi_X^*(\xi) \otimes \pi_{S^2}^*(\gamma) = \xi \hat{\otimes} \gamma\end{aligned}$$

jest naturalną równoważnością funktorów.

## Przykład i serce dowodu: wiązki nad $S^2$

- ▶  $S^2 \simeq \mathbb{C} \cup \infty \simeq \mathbb{D}_0 \cup \mathbb{D}_\infty$ .
- ▶ Nad  $S^2$  znamy wiązkę tautologiczną  $\gamma$  i dualną doń  $\gamma^{-1}$ .
- ▶ Nad  $\mathbb{D}_0$  i  $\mathbb{D}_\infty$  wszystkie wiązki są trywialne, rozważmy tylko liniowe.
- ▶ Wybierając izomorfizm wiązek nad  $S^1 - u \in \text{Aut}(S^1 \times \mathbb{C})$  i sklejając wzdłuż niego konstruujemy wiązkę nad  $S^2$  z dwóch trywialnych wiązek. Taką konstrukcję nazwiemy *spinaniem*.
- ▶ Jeśli  $u$  jest identycznością otrzymamy 1 – wiązkę trywialną nad  $S^2$ .
- ▶ Natomiast jeśli  $u(z)v = zv$  otrzymamy  $\gamma$ .

### Dowód.

$E(\gamma) = \{[z_0 : z_1], (az_0, az_1) | a \in \mathbb{C}\}$ . Mamy lokalne mapy:

$$\begin{aligned}h_i: D(z_i) \times \mathbb{C} &\rightarrow E(\gamma|_{D(z_i)}) \\h_0([z_0 : z_1], v) &= ([z_0 : z_1], (v, vz_1/z_0)) \\h_1([z_0 : z_1], v) &= ([z_0 : z_1], (vz_0/z_1, v))\end{aligned}$$

Niech  $z := z_1/z_0$ . Dla  $|z| = 1$  możemy używać obu map, więc

$$h_0(z, v) = h_1(z, u(z)v)$$

a stąd  $u(z) = z$ .



- ▶ Później pokażemy, że dla  $u(z)v = z^n v$  dostajemy wiązkę  $\gamma^n$ .

## Wiecej o wiązках nad $S^2$

Przed feriami:  $K(S^2) \simeq \frac{\mathbb{Z}[\gamma]}{(\gamma^2 - 1 = 2\gamma)} \simeq \frac{\mathbb{Z}[\gamma]}{(\gamma^{-2} - 1 = 2\gamma^{-1})}$

Czyli każdą wiązkę nad  $S^2$  da się uzyskać przez potęgi i sumy wiązki  $\gamma$ .  
Nauczmy się tłumaczyć tensorowanie przez  $\gamma$  na funkcję spinającą tzn.

$$u(z)v = z^n v \quad \text{daje} \quad \gamma^n$$

To będzie kluczowe w dowodzie.

$X$  – CW-kompleks;  $X_0, X_1, X_2$  jego pod-CW-kompleksy takie, że

$$X_0 = X_1 \cap X_2 \quad \text{oraz} \quad X_1 \cup X_2 = X$$

Niech  $E_1$  i  $E_2$  to wiązki nad  $X_1$  i  $X_2$ , oraz

$$\varphi: E_1|_{X_0} \rightarrow E_2|_{X_0}$$

izomorfizm wiązek nad  $X_0$ . Wówczas  $E_1 \cup_{\varphi} E_2$  jest wiązką nad  $X$ .  
Co więcej, jeśli  $E$  jest wiązką nad  $X$  to

$$E|_{X_1} \cup_{\text{id}} E|_{X_2} \simeq E$$

## Lemat

Spinanie jest przemienne z sumą prostą i tensorem:

$$\begin{aligned}(E_1 \oplus E_2) \cup_{\varphi \oplus \psi} (E'_1 \oplus E'_2) &\simeq (E_1 \cup_{\varphi} E'_1) \oplus (E_2 \cup_{\psi} E'_2) \\ (E_1 \otimes E_2) \cup_{\varphi \otimes \psi} (E'_1 \otimes E'_2) &\simeq (E_1 \cup_{\varphi} E'_1) \otimes (E_2 \cup_{\psi} E'_2)\end{aligned}$$

## Lemat

Homotopijne funkcje spinające indukują izomorficzne wiązki. Przez homotopię rozumiemy rodzinę izomorfizmów wiązek parametryzowaną odcinkiem.

## Spinanie wiązek nad $X \times S^2$

Oznaczmy:

- ▶  $S^2 = \mathbb{D}_0 \cup \mathbb{D}_\infty$ ,  $\mathbb{D}_0 \cap \mathbb{D}_\infty = S^1$
- ▶  $\pi: X \times S^1 \rightarrow X$  jest rzutem
- ▶  $\pi_0: X \times \mathbb{D}_0 \rightarrow X$ ,  $\pi_\infty: X \times \mathbb{D}_\infty \rightarrow X$  to również rzuty

Niech  $\zeta$  będzie wiązką nad  $X$ . Wybierzmy automorfizm

$$u: \pi^* \zeta \rightarrow \pi^* \zeta$$

Wówczas

$$\pi_0^* \zeta \cup_u \pi_\infty^* \zeta$$

jest wiązką nad  $X \times S^2$ . Będziemy oznaczać ją  $[\zeta, u]$ .

## Lemat

Dla każdej wiązki  $\xi$  nad  $X \times S^2$  istnieje jedyna z dokładnością do homotopii funkcja spinająca taka, że

$$\xi \simeq [\xi|_{X \times \mathbb{D}_0}, u] \quad \text{oraz:}$$
$$u|_{X \times 1} \text{ jest homotopijne z id}$$

## Dowód.

Niech  $s: X \hookrightarrow X \times S^1$  dany przez  $x \mapsto (x, 1)$ .  $s\pi_0: X \times \mathbb{D}_0$  jest homotopijną równoważnością, więc naturalny izomorfizm  $\xi|_{X \times 1} \xrightarrow{\cong} \pi^*(\zeta)|_{X \times 1}$  przedłuża się do izomorfizmu  $u_0: \xi|_{X \times \mathbb{D}_0} \simeq \pi_0^*\zeta$  nad  $X \times \mathbb{D}_0$  z dokładnością do automorfizmu  $\alpha \in \text{Aut}(\pi_0^*\zeta)$ , który nad  $X \times 1$  jest identycznością. Podobnie możemy zdefiniować  $u_\infty: \xi|_{X \times \mathbb{D}_\infty} \simeq \pi_\infty^*\zeta$ . Wówczas  $u = u_\infty u_0^{-1}$  spełnia żądane własności. □

## Definicja

*Endomorfizmem wiązki  $\lambda$*  nazywamy przekształcenie  $u: E(\lambda) \rightarrow E(\lambda)$ , które liniowo przekształca każde włókno na siebie samo. Na zbiorze endomorfizmów wiązki możemy zadać strukturę algebry zespolonej: wszystkie operacje definiujemy po włóknach.

## Uwaga

Jesteśmy zainteresowani przede wszystkim automorfizmami. Jednak na nich nie da się wprowadzić struktury algebry.

## Definicja

Niech  $\zeta$  będzie wiązką nad  $X$ .

- ▶ *Laurent-wielomianową funkcją spinającą* (ang. Laurent polynomial clutching map) dla wiązki  $\zeta$  nazywamy automorfizm  $u \in \text{Aut}(\pi^*\zeta)$  postaci:

$$u(x, z) = \sum_{|k| \leq n} a_k(x) z^k$$

$$\text{tzn. dla } v \in (\pi^*\zeta)_{(x,z)} \quad u(x, z)v = \sum_{|k| \leq n} a_k(x)v \cdot z^k$$

gdzie  $a_k: \zeta \rightarrow \zeta$  to endomorfizmy  $\zeta$ .

(istotną częścią definicji jest rozdzielenie zmiennych)

- ▶ Automorfizm  $u$  nazwiemy *wielomianowym* stopnia  $n$  jeśli jest postaci:

$$u(x, z) = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k(x) z^k$$

- ▶ Natomiast *liniowym* o ile:

$$u(x, z) = a(x)z + b(x)$$

## Twierdzenie (Atiyah-Bott)

$$\mu: K(X) \otimes K(S^2) \rightarrow K(X \times S^2)$$

$$\zeta \otimes \gamma \mapsto \zeta \hat{\otimes} \gamma$$

jest naturalną równoważnością funktorów.

1. Każdą wiązkę nad  $X \times S^2$  można uzyskać z wiązki  $\zeta$  nad  $X$  i funkcji spinającej – automorfizmu wiązki  $\pi^*\zeta$  nad  $X \times S^1$ .
2. Funkcje spinające tworzą szeroką klasę, ale każdą uda nam się zastąpić wielomianem Laurenta.
3. Domnażając przez wiązkę tautologiczną poprawimy funkcje spinające do wielomianowych.
4. Dodając odpowiednie wiązki  $\zeta$  poprawimy je do liniowych.
5. Analizując wiązki spięte liniowo pokażemy, że  $\mu: K(X) \otimes K(S^2) \rightarrow K(X \times S^2)$  jest epimorfizmem.
6. Innymi słowy, każdą wiązkę  $\xi$  nad  $X \times S^2$  rozpiszemy:  $\xi + \xi_1 = \xi_2$ , gdzie  $\xi_i \in \text{im } \mu$  (postaci  $\zeta \hat{\otimes} \gamma^n$ ). W  $K$ -teorii  $\xi = \xi_2 - \xi_1$ .
7. W dowodzie surjektywności znajdziemy kandydata na morfizm odwrotny i policzymy, że faktycznie nim jest.

## Stwierdzenie

$\forall \xi$  nad  $X \times S^2$ ,  $\xi \simeq [\zeta, u]$ , gdzie  $\zeta$  jest wiązką nad  $X$ ,  $u$  jest Laurent-wielomianową funkcją spinającą.

Szkic dowodu.

$$a_k: \zeta \rightarrow \zeta \quad a_k(x) := \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{w^{-k} u(x, w)}{w} dw$$

$$s_k(x, z) := \sum_{|j| \leq k} a_j(x) z^j, \quad u_n(x, z) := \frac{1}{n+1} \sum_{0 \leq k \leq n} s_k(x, z)$$

Można policzyć, że szereg  $u_n(x, z)$  zbiega punktowo do  $u(x, z)$ . Twierdzenie Fejera mówi, że dokładnie taki szereg zbiega jednostajnie.

Udało nam się jednoznacznie przybliżyć  $u$  szeregami Laurenta. Dla odpowiednio dużego skończonego  $n$ ,  $u_n$  będzie dowolnie bliskie, więc homotopijne z  $u$  i będzie wielomianem Laurenta. □

# Redukcja do wielomianowo spiętych wiązek

## Stwierdzenie

Niech  $\xi \simeq [\zeta, u]$ . Wówczas  $[\zeta, uz^n] \simeq \xi \otimes \pi_{S^2}^* \gamma^n$ .

Innymi słowy, domnożenie funkcji spinającej przez jednomian to domnożenie wiązki przez  $\gamma^n$ .

## Dowód.

Z przemienności spinania z tensorem:

$$\begin{aligned} [\zeta, uz^n] &\simeq \pi_0^*(\zeta) \cup_{uz^n} \pi_\infty^*(\zeta) \\ &\simeq (\pi_0^*\zeta \otimes 1) \cup_{u \otimes z^n} (\pi_\infty^*\zeta \otimes 1) \\ &\simeq [\zeta, u] \otimes [1, z^n] \\ &\simeq \xi \otimes \pi_{S^2}^* \gamma^n \end{aligned}$$



## Wniosek

Jeśli  $u$  było wielomianem Laurenta, to możemy je poprawić w ten sposób do wielomianu.

## Redukcja do liniowej funkcji spinającej I

wielomianowa funkcja spinająca stopnia  $n$  dla  $\zeta$ :  $p(x, z) := \sum_{0 \leq k \leq n} p_k(x) z^k$

wiązka nad  $X$ :  $L^n(\zeta) := \underbrace{\zeta \oplus \cdots \oplus \zeta}_{n+1}$

liniowa funkcja spinająca  $L^n(p): \pi^*(L^n(\zeta)) \rightarrow \pi^*(L^n(\zeta))$  dana macierzą:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ -z & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -z & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -z & 1 \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## Stwierdzenie

$$[L^n(\zeta), L^n(p)] \simeq [L^n(\zeta), p \oplus 1_n] \simeq [\zeta, p] \oplus [L^{n-1}(\zeta), 1] \quad (1)$$

(ideologicznie, zamieniamy  $\zeta$  spinaną wielomianem na większą wiązkę spinaną liniowo)

## Dowód.

Niech  $p_r^* = \sum_{r \leq k \leq n} p_k z^{k-r}$

$$L^n(p) = \begin{bmatrix} 1 & p_1^*(z) & \cdots & p_n^*(z) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(z) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -z & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -z & 1 \end{bmatrix}$$

a stąd

$$L^n(p) = (1 + N_1)(p \oplus 1_n)(1 + N_2)$$

gdzie  $N_1$  i  $N_2$  to części odpowiednio powyżej i poniżej diagonali części, zatem

$$L_t^n(p) := (1 + tN_1)(p \oplus 1_n)(1 + tN_2)$$

jest homotopią  $L^n(p) \sim (p \oplus 1_n)$ .



## Stwierdzenie

$$[L^{n+1}(\zeta), L^{n+1}(p)] \simeq [L^n(\zeta), L^n(p)] \oplus [\zeta, 1] \quad (2)$$

Dowód.

$$\begin{bmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_{n-1} & p_n & 0 \\ -z & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -z(1-t) & 1 \end{bmatrix}$$

zadaje homotopię  $L^{n+1}(p) \sim L^n(p) \oplus 1$ .



## Stwierdzenie

$$[L^{n+1}(\zeta), L^{n+1}(zp)] \simeq [L^n(\zeta), L^n(p)] \oplus [\zeta, z] \quad (3)$$

Dowód.

$$\begin{bmatrix} 0 & p_0 & p_1 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ -z & 1-t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -z & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -z & 1 \end{bmatrix}$$

zadaje homotopię  $L^{n+1}(zp) \sim L^n(p) \oplus z$ . By to zobaczyć musimy jeszcze zamienić wiersz pierwszy z drugim, ale taka zamiana jest stała po okręgu, czyli homotopijna z identycznością.  $\square$

## Wnioski z tych rozważań

Dla  $p$  stopnia  $\leq n$  mamy wzory:

- (1)  $[L^n(\zeta), L^n(p)] \simeq [\zeta, p] \oplus [L^{n-1}(\zeta), 1]$
- (2)  $[L^{n+1}(\zeta), L^{n+1}(p)] \simeq [L^n(\zeta), L^n(p)] \oplus [\zeta, 1]$
- (3)  $[L^{n+1}(\zeta), L^{n+1}(zp)] \simeq [L^n(\zeta), L^n(p)] \oplus [\zeta, z]$

Przykład

$$\gamma^2 \oplus 1 \simeq \gamma \oplus \gamma$$

Dowód.

Z jednej strony

$$[L^2(1), L^2(z^2)] \stackrel{(1)}{\simeq} [1, z^2] \oplus [1, 1] \oplus [1, 1]$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} [L^2(1), L^2(z^2)] &\stackrel{(3)}{\simeq} [L^1(1), L^1(z)] \oplus [1, z] \stackrel{(3)}{\simeq} [L^0(1), L^0(1)] \oplus [1, z] \oplus [1, z] \\ &\simeq [1, 1] \oplus [1, z] \oplus [1, z] \end{aligned}$$

Ale w  $K(-)$  możemy odejmować stronami, więc

$$[1, z^2] \oplus [1, 1] \oplus \cancel{[1, 1]} \simeq \cancel{[1, 1]} \oplus [1, z] \oplus [1, z]$$



Niech  $q(x, z) := a(x)z + b(x)$  będzie *liniową po  $z$*  funkcją spinającą dla  $\zeta$  nad  $X$ . Rozłożymy  $\zeta$  na sumę prostą dwóch wiązek:  $\zeta_+$  i  $\zeta_-$ , które obie leżą w obrazie  $\mu$  tzn. są postaci  $\eta \hat{\otimes} \gamma^k$ , gdzie  $\eta$  jest wiązką nad  $X$ . W szczególności dążymy do takiego izomorfizmu:

$$[\zeta, a(x)z + b(x)] \simeq [\zeta_+, z] \oplus [\zeta_-, 1]$$

### Definicja

Przypomnijmy  $q(x, z) = a(x)z + b(x)$ . Zadaajmy  $q_0, q_\infty: \zeta \rightarrow \zeta$ :

$$q_0(x) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} ((a(x)z + b(x))^{-1} a(x) dz$$
$$q_\infty(x) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} a(x)(a(x)z + b(x))^{-1} dz$$

### Przykład

Dla  $q = \text{id} = 0 \cdot z + 1$ :  $q_{0,\infty}(x) = 0$

### Stwierdzenie

$$q(x, z)q_0(x) = q_\infty(x)q(x, z)$$

dla  $|z| = 1$ ,  $x$  dowolnego.

Najpierw pokażemy pewną przemienność. Dla  $z \neq w$ :

$$\begin{aligned}\frac{(az+b)^{-1}}{w-z} + \frac{(aw+b)^{-1}}{z-w} &= (aw+b)^{-1} \frac{aw+b}{w-z} (az+b)^{-1} + (aw+b)^{-1} \frac{az+b}{z-w} (az+b)^{-1} \\ &= (aw+b)^{-1} \left( \frac{aw+b}{w-z} + \frac{az+b}{z-w} \right) (az+b)^{-1} \\ (az+b)^{-1} a(aw+b)^{-1} &= (aw+b)^{-1} a(az+b)^{-1}\end{aligned}\tag{R}$$

Rozważmy

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} (az+b)(R)(az+b) dw: \\ & \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} a(aw+b)^{-1}(az+b) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} (az+b)(aw+b)^{-1} a dw \\ & \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} a(aw+b)^{-1} dw \right) (az+b) = (az+b) \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} (aw+b)^{-1} a dw \\ & q_{\infty} q = q q_0\end{aligned}$$



$q_0$  i  $q_\infty$  to faktycznie rzuty

## Stwierdzenie

$q_0 q_0 = q_0$  oraz  $q_\infty q_\infty = q_\infty$

## Dowód.

Zauważmy, że skoro  $q = az + b$  jest odwracalne na  $\mathbb{D}_0 \cap \mathbb{D}_\infty = \{|z| = 1\}$ , czyli na zbiorze domkniętym to jest też odwracalne na  $\{1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon\}$ . Całka zależy tylko od klasy homotopii ścieżki, wobec czego możemy wybrać  $1 - \varepsilon < r_2 < r_1 < 1 + \varepsilon$  i napisać

$$\begin{aligned} q_0 q_0 &= \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{|z|=r_1} \int_{|w|=r_2} (az + b)^{-1} a (aw + b)^{-1} a \, dw \, dz \\ &= \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{|z|=r_1} \int_{|w|=r_2} \frac{(az + b)^{-1} a}{w - z} + \frac{(aw + b)^{-1} a}{z - w} \, dw \, dz \\ &= \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^2 \left( \int_{|w|=r_2} (aw + b)^{-1} a \underbrace{\int_{|z|=r_1} \frac{1}{z - w} \, dz}_{2\pi i} \, dw + \int_{|z|=r_1} (az + b)^{-1} a \underbrace{\int_{|w|=r_2} \frac{1}{w - z} \, dw}_{0} \, dz \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} (aw + b)^{-1} a \, dw = q_0 \end{aligned}$$

Dla  $q_\infty$  dowód jest analogiczny.



## Definicja

Jak wszystkie rzuty,  $\zeta_{\pm}^i$  są stałej rangi, więc mają sens:

$$\begin{aligned}\zeta_+^0 &:= \operatorname{im} q_0 & \zeta_+^{\infty} &:= \operatorname{im} q_{\infty} \\ \zeta_-^0 &:= \ker q_0 & \zeta_-^{\infty} &:= \ker q_{\infty}\end{aligned}$$

Mają sens również przycięcia

$$q_+(-, z): \zeta_+^0 \rightarrow \zeta_+^{\infty}$$

$$q_-(-, z): \zeta_-^0 \rightarrow \zeta_-^{\infty}$$

ponieważ  $q$  jest izomorfizmem, więc

$$q(\operatorname{im} q_0) = \operatorname{im}(qq_0) = \operatorname{im}(q_{\infty}q) = \operatorname{im} q_{\infty}$$

$$q(\ker q_0) = \ker qq_0 = \ker q_{\infty}q = \ker p_{\infty}$$

(dla czytelności często będziemy pomijać 0 oraz  $\infty$  i traktować  $q_{\pm}$  jak automorfizmy)

## Przykład

$$\text{Dla } q = \operatorname{id} = 0 \cdot z + 1 \implies q_{0,\infty} = 0: \quad \begin{cases} \zeta_+ = \operatorname{im} 0 = 0 \\ \zeta_- = \ker 0 = \zeta \end{cases}$$

## Stwierdzenie

$q_+(-, z)$  jest izomorfizmem dla  $|z| \geq 1$ , a  $q_-(-, z)$  jest dla  $|z| \leq 1$ .

( $|z| = \infty$  oraz  $|z| = 0$  też mają sens, bo pracujemy na sferze Riemanna)

## Dowód.

Wybierzmy  $v$  takie, że  $\exists_w: q(v) = (aw + b)v = 0$ . Zauważmy, że  $|w| \neq 1$ .

Wówczas dla  $|z| = 1$

$$\begin{aligned} (az + b)v &= (az + b)v - (aw + b)v = a(z - w)v & \left| \frac{(az + b)^{-1}}{z - w} \cdot \left( - \right) \right. \\ \frac{1}{z - w} &= (az + b)^{-1}av & \left| \text{całkujemy po } z \right. \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z - w} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} (az + b)^{-1}av dz \\ \left. \begin{array}{ll} |w| < 1: & v \\ |w| > 1: & 0 \end{array} \right\} &= q_0(v) \end{aligned}$$

Zatem  $v \in \ker q(x, w) \wedge |w| < 1 \implies q_0 v = v$ , czyli  $v \in \zeta_+^0$ .

$$\ker q_-(x, w) = \ker q(x, w) \cap \zeta_-^0 \stackrel{|w| \leq 1}{=} \zeta_+^0 \cap \zeta_-^0 = \emptyset$$

Natomiast  $v \in \ker q(x, w) \wedge |w| > 1 \implies q_0 v = 0$ , czyli  $v \in \zeta_-^0$ .

$$\ker q_+(x, w) = \ker q(x, w) \cap \zeta_+^0 \stackrel{|w| \geq 1}{=} \zeta_-^0 \cap \zeta_+^0 = \emptyset$$

Widzimy więc, że  $q_+$  i  $q_-$ , to monomorfizmy między przestrzeniami tego samego wymiaru, czyli izomorfizmy. □

## Stwierdzenie

Dla liniowej funkcji spinającej  $q = az + b$  zachodzi

$$[\zeta, q] \simeq [\zeta_+, z] \oplus [\zeta_-, 1]$$

(równie dobrze moglibyśmy zamienić  $+$  i  $-$ , ten wybór jest jedynie dla ustalenia uwagi.)

## Dowód.

Oznaczmy  $a_+z + b_+ := q_+$ ,  $a_-z + b_- := q_-$

$$\begin{aligned} a_+z + b_+ &:= q_+, & a_-z + b_- &:= q_- \\ q_+^t &:= a_+z + tb_+, & q_-^t &:= ta_-z + b_- \end{aligned}$$

( $q_{\pm}$  to przycięcia  $q$ , ale rozpatrywane na innych przestrzeniach, więc  $a_{\pm}$ ,  $b_{\pm}$  to nie  $a$ ,  $b$ )

( $a_+$  to koniecznie izomorfizm, ponieważ dla  $z = \infty$ ,  $q_+ = a_+$  jest izo.  $b_-$  podobnie)

$q_+^t$  jest izomorfizmem dla  $t \in [0, 1]$ , bo  $q_+$  nim jest dla  $|z| \geq 1$  (skalujemy);

$q_-^t$  analogicznie. Zatem  $q_+^t \oplus q_-^t$  jest homotopią  $a_+z \oplus b_- \sim q$  przez

izomorfizmy, stąd

$$\begin{aligned} [\zeta, q] &\simeq [\zeta, a_+z \oplus b_-] \simeq [\zeta_+ \oplus \zeta_-, a_+ \oplus b_-] \simeq [\zeta_+, a_+z] \oplus [\zeta_-, b_-] \\ &\simeq [\zeta_+, z] \oplus [\zeta_-, 1] \end{aligned}$$



$$L^n(p) = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ -z & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -z & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -z & 1 \end{bmatrix}$$

jest liniowa po  $z$ , więc stosują się do niej ostatnie rozważania. Napiszmy rozkład  $L^n(\zeta)$  względem  $L^n(p)$ :

$$\begin{aligned} L^n(\zeta) &= L^n(\zeta, p)_+ \oplus L^n(\zeta, p)_- \\ [L^n(\zeta), L^n(p)] &\simeq [L^n(\zeta, p)_+, z] \oplus [L^n(\zeta, p)_-, 1] \end{aligned}$$

### Stwierdzenie

Jeśli  $p$  jest wielomianem stopnia  $\leq$  niż  $n$  to zachodzą:

$$L^{n+1}(\zeta, p)_+ \simeq L^n(\zeta, p)_+, \quad \text{oraz} \quad L^{n+1}(\zeta, p)_- \simeq L^{n+1}(\zeta, p)_- \oplus \zeta \quad (4)$$

$$L^{n+1}(\zeta, zp)_+ \simeq L^n(\zeta, p)_+ \oplus \zeta, \quad \text{oraz} \quad L^{n+1}(\zeta, zp)_- \simeq L^{n+1}(\zeta, p)_- \quad (5)$$

Będziemy operować na wielu funkcjach spinających, więc wprowadźmy oznaczenie:

$\zeta_{\pm,u}$  to rozkład  $\zeta$  względem  $u$

Liczymy:

$$\begin{aligned} L^{n+1}(\zeta, p)_{\pm} &\simeq L^{n+1}(\zeta)_{\pm, L^{n+1}(p)} \\ &\simeq (L^n(\zeta) \oplus \zeta)_{\pm, L^n(p) \oplus 1} \\ &\simeq L^n(\zeta)_{\pm, L^n(p)} \oplus \zeta_{\pm, 1} \\ &\simeq \begin{cases} L^n(\zeta, p)_+ \oplus 0 & \text{lub} \\ L^n(\zeta, p)_- \oplus \zeta \end{cases} \end{aligned}$$

Dla  $L^{n+1}(zp)$  dowód analogiczny.



$\mu: K(X) \otimes K(S^2) \rightarrow K(X \times S^2)$  jest surjekcją

Dla dowolnej wiązki  $\xi$  nad  $X \times S^2$  zachodzi:

$$\xi \simeq [\zeta, u]$$

$$[\zeta, u] \otimes \pi_{S^2}^* \gamma^k \simeq [\zeta, p]$$

$$\begin{aligned} [\zeta, p] \oplus [L^{n-1}(\zeta), 1] &\simeq [L^n(\zeta), L^n(p)] \simeq [L^n(\zeta, p)_+, z] \oplus [L^n(\zeta, p)_-, 1] \\ &\simeq (L^n(\zeta, p)_+ \hat{\otimes} \gamma) \oplus (L^n(\zeta, p)_- \hat{\otimes} \gamma^0) \end{aligned}$$

Czyli w  $K(X \times S^2)$

$$\begin{aligned} \xi \otimes \pi_{S^2}^* \gamma^k &= (L^n(\zeta, p)_+ \hat{\otimes} \gamma) + (L^n(\zeta, p)_- \hat{\otimes} \gamma^0) - (L^{n-1}(\zeta) \hat{\otimes} \gamma^0) \quad \Bigg| \otimes \pi_{S^2}^* \gamma^{-k} \\ \xi &= (L^n(\zeta, p)_+ \hat{\otimes} \gamma^{-k+1}) + (L^n(\zeta, p)_- \hat{\otimes} \gamma^{-k}) - (L^{n-1}(\zeta) \hat{\otimes} \gamma^{-k}) \end{aligned}$$

Morfizm  $\nu: K(X \times S^2) \rightarrow K(X) \otimes K(S^2)$

### Definicja

Niech  $p_n$  będzie wielomianem stopnia  $\leq 2n$  takim, że  $z^{-n}p_n$  jest homotopijne z  $u$ .

$$\nu_n[\zeta, u] := L^{2n}(\zeta, p_n)_+ \otimes (\gamma^{1-n} - \gamma^{-n}) + \zeta \otimes \gamma^{-n}$$

Przypomnijmy, że

$$K(S^2) \simeq \frac{\mathbb{Z}[\gamma]}{(\gamma^{-2} + 1 = 2\gamma^{-1})} \simeq \frac{\mathbb{Z}[\gamma]}{((1 - \gamma^{-1})\gamma^{-1} = 1 - \gamma^{-1})}$$

zatem  $(1 - \gamma^{-1})\gamma^{-1} = 1 - \gamma^{-1}$  w  $K(S^2)$ , więc

$$\nu_n[\zeta, u] = L^{2n}(\zeta, p_n)_+ \otimes (1 - \gamma^{-1}) + \zeta \otimes \gamma^{-n}$$

### Stwierdzenie

Jeśli istnieje  $\nu_n$  to również  $\nu_{n+1}$  jest dobrze określone oraz zachodzi  $\nu_n = \nu_{n+1}$ . Pozwala to nam pisać  $\nu[\zeta, u]$  ddd. n.

Co więcej,  $\nu$  zależy tylko od klasy homotopii  $u$  oraz jest rozdzielne ze względu na sumę prostą tzn. jest dobrze określonym morfizmem  $K(X \times S^2) \rightarrow K(X) \otimes K(S^2)$ .

Niech  $p_{n+1} := zp_n$ . Wówczas  $\deg p_{n+1} \leq 2n + 2$  oraz

$$u \sim z^{-n}p_n \sim z^{-n-1}zp_n \sim z^{-(n+1)}p_{n+1}$$

Mamy również:

$$L^{2n+2}(\zeta, p_{n+1})_+ \stackrel{\text{def.}}{=} L^{2n+2}(\zeta, zp_{n+1})_+ \stackrel{(4)}{=} L^{2n+1}(\zeta, zp_n)_+ \stackrel{(5)}{=} L^{2n}(\zeta, p_n)_+ \oplus \zeta$$

Możemy więc policzyć:

$$\begin{aligned} v_{n+1}[\zeta, u] &= L^{2n+2}(\zeta, p_{n+1})_+ \otimes (\gamma^{-n} - \gamma^{-n-1}) + \zeta \otimes \gamma^{-n-1} \\ &= L^{2n}(\zeta, p_n)_+ \otimes (\gamma^{-n} - \gamma^{-n-1}) + \zeta \otimes (\gamma^{-n} - \gamma^{-n-1}) + \zeta \otimes \gamma^{-n-1} \\ &= L^{2n}(\zeta, p_n)_+ \otimes (\gamma^{1-n} - \gamma^{-n}) + \zeta \otimes \gamma^{-n} \\ &= v_n[\zeta, u] \end{aligned}$$



# Dowód Twierdzenia Botta

## Twierdzenie

Dla przypomnienia:  $\mu: K(X) \otimes K(S^2) \rightarrow K(X \times S^2)$  jest izomorfizmem z odwrotnością  $\nu$ .

## Dowód.

( $\nu\mu = 1$ )

Wystarczy pokazać tezę na generatorach tzn. na  $\zeta \hat{\otimes} \gamma^{-n}$ .

(w zasadzie  $n \in \{0, 1\}$ , ponieważ  $K(S^2) \simeq \mathbb{Z}[\gamma]/(\gamma^{-2} - 2\gamma^{-1} - 1)$ )

$$\begin{aligned}\nu\mu(\zeta \hat{\otimes} \gamma^{-n}) &= \nu([\zeta, z^{-n}]) = L^{2n}(\zeta, 1)_+ \otimes (\gamma^{1-n} - \gamma^{-n}) + \zeta \hat{\otimes} \gamma^{-n} \\ &\stackrel{(4)}{=} L^0(\zeta, 1)_+ \hat{\otimes} (\gamma^{1-n} - \gamma^{-n}) + \zeta \hat{\otimes} \gamma^{-n} \\ &= 0 \hat{\otimes} (\gamma^{1-n} - \gamma^{-n}) + \zeta \hat{\otimes} \gamma^{-n}\end{aligned}$$

( $\mu\nu = 1$ )

Najpierw dwie relacje:

$$\begin{aligned} [L^{2n}(\zeta, p_n)_+, z] &= [L^{2n}(\zeta), L^{2n}(p_n)] - [L^{2n}(\zeta, p_n)_-, 1] \quad \Bigg| \otimes \pi_{S^2}^* \gamma^{-n} \\ [L^{2n}(\zeta, p_n)_+, z^{1-n}] &= [L^{2n}(\zeta), L^{2n}(p_n)] \otimes \pi_{S^2}^* \gamma^{-n} - [L^{2n}(\zeta, p_n)_-, 1] \otimes \pi_{S^2}^* \gamma^{-n} \quad (\text{a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [L^{2n}(\zeta), L^{2n}(p_n)] &\stackrel{(1)}{=} [\zeta, p_n] \oplus [L^{2n-1}(\zeta), 1] \quad \Bigg| \otimes \pi_{S^2}^* \gamma^{-n} \\ [L^{2n}(\zeta), L^{2n}(p_n)] \otimes \pi_{S^2}^* \gamma^{-n} &= [\zeta, p_n] \otimes \pi_{S^2}^* \gamma^{-n} + [L^{2n-1}(\zeta), 1] \otimes \pi_{S^2}^* \gamma^{-n} \quad (\text{b}) \end{aligned}$$

Liczymy:

$$\begin{aligned} \mu\nu(\xi) &= \mu \left( L^{2n}(\zeta, p)_+ \hat{\otimes} (\gamma^{1-n} - \gamma^{-n}) + \zeta \hat{\otimes} \gamma^{-n} \right) \\ &= [L^{2n}(\zeta, p_n)_+, z^{1-n}] - [L^{2n}(\zeta, p_n)_+, z^{-n}] + [\zeta, z^{-n}] \\ &\stackrel{(\text{a})}{=} [L^{2n}(\zeta), L^{2n}(p_n)] \otimes \pi_{S^2}^* \gamma^{-n} - [L^{2n}(\zeta, p_n)_-, 1] \otimes \pi_{S^2}^* \gamma^{-n} \\ &\quad - [L^{2n}(\zeta, p_n)_+, 1] \otimes \pi_{S^2}^* \gamma^{-n} + \zeta \otimes \pi_{S^2}^* \gamma^{-n} \\ &\stackrel{(\text{b})}{=} [\zeta, p_n] \otimes \pi_{S^2}^* \gamma^{-n} + [L^{2n-1}(\zeta), 1] \otimes \pi_{S^2}^* \gamma^{-n} - [L^{2n}(\zeta), 1] \otimes \pi_{S^2}^* \gamma^{-n} + \zeta \otimes \pi_{S^2}^* \gamma^{-n} \\ &= [\zeta, z^{-n} p_n] \\ &= \xi \end{aligned}$$

□

Dziękuję za uwagę

